PRZYKŁADY ALGEBR

Piotr Słanina

22 kwietnia 2003

Definicja 1 *Działaniem n zmiennych (n-arnym) w zbiorze X nazywamy funkcję* $f : X^n \longrightarrow X$.

Definicja 2 *Algebrą* $\mathbf{A}$ *nazywamy parę* $(A, \{f_t\}_{t \in T})$, *gdzie A jest niepustym zbiorem działań* f_t *na zbiorze X.*

Przykład 1 $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, ^-, 0)$ *to algebra składająca się ze zbioru liczb całkowitych i binarnych działań sumy* $+$, *odejmowania* $-$, *mnożenia* $\cdot$, *unarnego (1-arnego) dzialania brania elementu odwrotnego do dodawania* $^-$ *oraz bezargumentowego dzialania (mówi sie także "wyróżnionego elementu")* 0. *Do tej algebry nie można dołączyć dzialania dzielenia , bo dzieląc dwie liczby całkowite nie otrzymujemy w wyniku liczby całkowitej.*

Przykład 2 $(2^{\{a,b,\ldots,x,y,z\}}, \cup, \cap, \div, \setminus, ', \emptyset)$ *to algebra, którą tworzy rodzina (zbiór) podzbiorów zbioru liter alfabetu, a działaniami są binarne:* $\cup, \cap, \div, \setminus$ *(suma, iloczyn, różnica symetryczna i różnica zbiorów); unarne* $'$ *(branie dopełnienia zbioru) i wyróżniony element* $\emptyset$, *czyli zbiór pusty.*

Przykład 3 *W algebrze działania mogą być zdefiniowane w bardzo różny i wymyślny sposób; np.* $(\mathbb{R}, f_1, f_2, f_3)$, *gdzie* $f_1(a, b) = \frac{a+b}{3b^2+7}$ *to pewne działanie binarne,* $f_2(a, b, c, d) = b^c \cdot Log(|a + 2d| + 1)$ *- dzialanie 4-arne,* $f_3(a) = [a]$ *to zaokrąglenie a w dół (tzw. cecha). Uwaga praktyczna: trzeba uważać aby nie przesadzić przy wymyślaniu dziwnych działań, aby zawsza działania były dobrze określone, tzn. w tym przypadku do danej algebry nie można dołączyć np. działania* $f_4(a) = \sqrt{a}$, *ponieważ pierwiastek nie jest określony na wszystkich liczbach rzeczywistych.*

[0]Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990

Przykład 4 *Algebrami są: półgrupa* $(G,+)$, *grupa* $(G,+,^-,0)$, *pierścień* $(R,+,\cdot,^-,0)$, *przestrzeń liniowa* $(V,+,x_{k_{k\in\mathbb{K}}})$, *gdzie* $\mathbb{K}$ *to ciało, nad którym jest zdefiniowana przestrzeń liniowa. Samo ciało* $(\mathbb{K},+,\cdot,^-,^{-1},0,1)$ *nie jest algebrą, bo nie jest określona funkcja* $^{-1}$ *na elemencie* 0*, tzn. nie ma elementu odwrotnego do* 0.

Definicja 3 *Jeśli* $\mathbf{A} = (A, \{f_t\}_{t\in T})$ *jest algebrą,* B *niepustym podzbiorem zbioru* A *i dla każdego* $t \in T$ *funkcja* f_t *jest działaniem w* B*, to algebrę* $\mathbf{B} = (B, \{f_t\}_{t\in T})$ *nazywamy podalgebrą algebry* $\mathbf{A} = (A, \{f_t\}_{t\in T})$.

Zawsze podalgebrą algebry $\mathbf{A}$ jest $\mathbf{A}$.

Przykład 5 *W przykładzie 1 podalgebrą jest np. zbiór wszystkich załkowitych liczb podzielnych przez 5 tzw.* $5\mathbb{Z}$*. Można bowiem nietrudno udowodnić, że suma, różnica i iloczyn elementów podzielnych przez pięć również jest podzielny przez pięć. Podobnie element odwrotny do elementu podzielnego przez pięć także jest podzielny przez pięć. Wreszcie* 0 *też jest podzielne przez pięć. Ogólnie, każdy zbiór* $n\mathbb{Z}$ *liczb podzielnych przez* n *z działaniami zdefiniowanymi jak powyżej jest podalgebrą* $(\mathbb{Z},+,-,\cdot,^-,0)$.

Przykład 6 *W przykładzie 2 przykładem podalgebry jest zbiór skądający się ze zbioru pustego* $\emptyset$ *i ze zbioru wszystkich liter* $X = \{a, b, ..., x, y, z\}$*. Rzeczywiście, używając działań sumy, różnicy, iloczynu i sumy rozłącznej na zbiorze pustym i* X *w wyniku zawsze uzyskam jeden z nich. Ponadto* $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$.

Definicja 4 *Niech* $\mathbf{A} = (A, \{f_t\}_{t\in T})$, $\mathbf{B} = (B, \{g_t\}_{t\in T})$ *są dwiema algebrami takimi, że* f_t *i* g_t, $t \in T$ *są działaniami* n_t *zmiennych. Funkcja* $\varphi : A \longrightarrow B$ *nazywa się homomorfizmem algebry* $\mathbf{A}$ *w* $\mathbf{B}$*, jeśli* $g_t(\varphi(a_1), ..., \varphi(a_{n_t})) = \varphi(f_t(a_1, ..., a_{n_t}))$ *dla wszystkich* $a_1, ..., a_n \in A$ *oraz* $t \in T$.

Przykład 7 *Oto kilka homomorfizmów:*
1. φ *odwzorowywujący dowolną algebrę* $\mathbf{A} = (A, \{f_t\}_{t\in T})$ *w* $\mathbf{A} = (A, \{f_t\}_{t\in T})$, *będący odwzorowaniem identycznościowym.*
2. Dowolnej grupy w dowolną inną grupę w taki sposób, że $\varphi(x) = 0$ *dla dowolnego elementu* x *z grupy.*
3. Odwzorowania$\varphi : (Z, +, \cdot, 0) \longrightarrow (Z, +, \cdot, 0)$ *postaci* $\varphi(x) = nx$, n *ustalona liczba całkowita.*

Definicja 5 *Relację typu równoważności* $\mathbf{R}$ *na zbiorze* A *nazywa się kongruencją algebry* $\mathbf{A} = (A, \{f_t\}_{t\in T})$*, jeśli dla każdego działania* f_t*, posiadającego* n_t *zmiennych,* $t \in T$*, warunek* $a_i\mathbf{R}b_i$ *dla* $i = 1, ..., n_t$ *implikuje* $f_t(a_1, ..., a_{n_t})\mathbf{R}f_t(b_1, ..., b_{n_t})$.

Przykład 8 *W algebrze* $(Z, \vee, \wedge, \sim, \Rightarrow)$*, gdzie* Z *jest zbiorem wszystkich zdań logicznych a* $\vee, \wedge, \sim, \Rightarrow$ *są spójnikami logicznymi relacja* $p\mathbf{R}q$ *wtedy i tylko wtedy gdy* p *i* q *mają taką samą wartość logiczną jest kongruencją.*
Są tutaj dwie klasy abstrakcji względem zadanej relacji: pierwszą tworzą wszystkie zdania prawdziwe, a drugą wszystkie zdania fałszywe.
Sprawdźmy warunki kongruencji dla działania (dwuargumentowego) $\vee$*; niech* $a_1\mathbf{R}b_1$ *i* $a_2\mathbf{R}b_2$*. Są dwie możliwości: albo* a_1 *i* a_2 *są obydwa fałszywe (stąd* b_1 *i* b_2 *również) to wtedy* $a_1 \vee a_2$ *jest fałszywe i* $b_1 \vee b_2$ *też. Jeżeli natomiast któreś ze zdań* a_1*,* a_2 *jest prawdziwe (stąd któreś z* b_1 *i* b_2 *również) to wtedy* $a_1 \vee a_2$ *jest prawdziwe i* $b_1 \vee b_2$ *też. Dla pozostałych działań dowód jest podobny.*

Przykład 9 *W algebrze* $(\mathbb{Z}_n, +, ^-, 0)$ *kongruencją jest przystawanie modulo* m*, gdzie* m *jest dowolnym dzielnikiem* n *(oczywiście może m. in. być równy* n *lub* 1*)*

Zadanie 1 *Pokazać, że w podalgebrze* $(B, +, ^-)$ *algebry* $(\mathbb{Z}, +, ^-)$ *znajduje się element* 1 *wtedy i tylko wtedy gdy* $B = \mathbb{Z}$*. Pokazać, że w podalgebrze* $(B, +)$ *algebry* $(\mathbb{Z}, +)$ *znajduje się element* 1 *wtedy i tylko wtedy gdy* $B \supseteq \mathbb{N}$*.*

Zadanie 2 *Znaleźć inne podalgebry algebr zdefiniowanych w przykładach 1 i 2 niż pokazane w 5 i 6.*
(Rozw. w pierwszym przykładzie może to być tylko $\{0\}$*. W drugim przykładzie jest to np* $B = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{d, e, ..., x, y, z\}, \{a, b, ..., x, y, z\}\}$*. A może potrafisz wskazać jeszcze inne, np. ośmioelementowe? A już naprawdę trudne jest do pokazania, że ilość elementów w każdej podalgebrze tego typu musi być potęgą dwójki!)*

Zadanie 3 *Opisać wszystkie podalgebry algebry* $(\mathbb{N}, \circ)$*, gdzie* $a \circ b = a + b - 1$*, zawierające: a) dwójkę b) trójkę c) czwórkę.*

Zadanie 4 *Wykazać, że* $(a+\sqrt{2}b, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ *jest podalgebrą algebry* $(\mathbb{R}, +, \cdot, ^-, 0, 1)$*.*
Pokazać, że jest to również prawdą dla podalgebry składającej się z elementów $a + \sqrt{p} \cdot b$ *dla dowolnej liczby pierwszej* p*.*
Wykazać, że $(a+2^{\frac{1}{3}}b+4^{\frac{1}{3}}c, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ *jest podalgebrą algebry* $(\mathbb{R}, +, \cdot, ^-, 0, 1)$*.*
Uwaga: współczynniki a, b, c *to liczby całkowite.*

Zadanie 5 *Wykazać, że homomorfizmem* $(2^X, \cap, \cup, -)$ *na algebrę* $(2^X, \cup, \cap, -)$ *(zwróć uwagę na kolejność binarnych działań) jest funkcja* $\varphi(A) = -A$*.* $-A$ *oznacza dopełnienie zbioru* A*.*

Zadanie 6 *Niech* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *oznacza zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o współczynnikach rzeczywistych. Czy homomorfizmami* $\varphi_i : (A, +, \cdot) \longrightarrow$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ *są funkcje:*

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} lim_{n\to\infty}|a_n| & \text{jesli ta granica istnieje} \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = a_3 - a_{92} + 4a_8$$

$$\varphi_3(x) = 1 + a_3 - a_{92} + 4a_8$$

$$\varphi_4(x) = min_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$$

$$\varphi_5(x) = min_{n\in\mathbb{N}}|a_{n+1} - a_n|$$

$$\varphi_6(x) = \begin{cases} max_{n\in\mathbb{N}}|a_n| & \text{jesli ta liczba istnieje} \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Zadanie 7 *Udowodnić że w algebrze* $(\mathbb{Z},+,\cdot,^-,0)$ *kongruencją jest przystawanie modulo* n*,* $n\in\mathbb{N}$*, ustalona.*

Zadanie 8 *W dowolnej algebrze* $\mathbf{A}$ *kongruencjami są:*
a) $a\mathbf{R}b \Leftrightarrow a=b$*;* *b)* $a\mathbf{R}b$ $\forall a,b\in A$.

Zadanie 9 *Znaleźć wszystkie podalgebry i kongruencje w algebrach a)* $(X;X^X)$ *b)* $(X;Id_X)$ *c)* $(X;f_{x_0})$*, gdzie* $f_{x_0}=(x,y)=x_0$ *dla* $x,y\in X$*;* x_0 *jest ustalonym elementem z* X *(rozw. podalgebrami są w a) tylko* $(X;X^X)$*, w b) dowolny podzbiór* X*, w c) dowolny podzbiór* X *zawierający* x_0.
(W a) kongruencjami są tylko relacje określone w zadaniu 8, w b) i c) są to dowolne relacje równoważności).

Zadanie 10 *Dla jakiego* $n\in\mathbb{N}$ *w pierścieniu* $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ *homomorfizmen jest funkcja* $\varphi(x)=x^n$*?*

Zadanie 11 $(2^X,\cup,\cap)$ *jest algebrą. Udowodnić, że każdy podzbiór* X *z wymienionymi działaniami jest jego podalgebrą. Które z poniższych relacji są kongruencjami:*
1. $A\mathbf{R}B \Leftrightarrow |A|=|B|$
2. $A\mathbf{R}B \Leftrightarrow A\subseteq B \vee B\subseteq A$
3. $A\mathbf{R}B \Leftrightarrow A \div B = \emptyset$