# GRUPY

Piotr Słanina

22 kwietnia 2003

**Definicja 1** *Niech $G$ będzie zbiorem z działaniami: binarnym $\oplus$, unarnym $^-$ oraz wyróżnionym elementem $e$ (czyli $G$ nie może być pusty).*
*Niech powyższe działania spełnają następujące równości:*

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 \oplus g_2) \oplus g_3 = g_1 \oplus (g_2 \oplus g_3) \tag{1}$$

$$\forall g \in G \quad g \oplus e = e \oplus g = g \tag{2}$$

$$\forall g \in G \quad \exists \bar{g} \in G \quad g \oplus \bar{g} = \bar{g} \oplus g = e. \tag{3}$$

*Wtedy $(G, \oplus, ^-, e)$ (albo w skrócie $G$) nazywamy grupą. Element $e$ nazywamy elementem neutralnym działania $\oplus$, a $\bar{g}$ elementem przeciwnym do $g$.*

**Definicja 2** *Jeżeli w grupie zachodzi równość:*

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \oplus g_2 = g_2 \oplus g_1$$

*to grupa $G$ jest przemienna.*

**Przykład 1** *Grupy przemienne:*
1.1 $(\mathbb{C}, +, ^-, 0)$,
1.2 $(\mathbb{Z}_n, +_n, ^-_n, 0)$ - grupa liczb całkowitych modulo n: $\{0, 1, ..., n-1\}$,
1.3 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$,
1.4 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, ^-, (0, 0, ...))$ - grupa nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych,
1.5 $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, ^-, 0)$ - grupa funkcji rzeczywistych,
1.6 Grupa obrotów wielokąta foremnego z operacją składania obrotów.

**Przykład 2** *Grupy nieprzemienne (wykazanie ich nieprzemienności pozostawiam do wykazania czytelnikowi):*
2.1 $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot,^{-1},I)$ - grupa odwracalnych macierzy $2\times 2$ o współczynnikach rzeczywistych,
2.2 $(S_n,\circ,^{-1},id)$, $n>2$ grupa permutacji zbioru n-elementowego z operacją składania,
2.3 $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\circ,^{-1},x)$ grupa różnowartościowych funkcji rzeczywistych z operacją składania,
2.4 Grupa przekształceń izomorficznych wielokąta foremnego (np. dla kwadratu elementami tej grupy są obroty kwadrata wokół jego środka o $0^o, 90^0, 180^0, 270^0$ oraz cztery symetrie osiowe).

Z twierdzeń Birkhoffa wynika, że również iloczyn kartezjański grup, iloraz dwóch grup (o ile grupa będąca dzielnikiem jest normalna) oraz obraz homomorficzny grupy jest grupą.

**Przykład 3** $\mathbb{R}$ *jest grupą (z dodawaniem). Zatem zbiór rzeczywistych nieskończonych ciągów* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$ *jako iloczyn kartezjański grup również jest grupą.*

Uwaga: są dwa rodzaje zapisu używane w grupach. Jeżeli $\oplus$ można utożsamiać z dodawaniem to Grupę zapisujemy $(G,+,^{-},0)$. Jest to zapis addytywny, używany np. w przykładzie 1.1 lub 1.2.
Jeżeli $\oplus$ utożsamiamy z mnożeniem jak w przykładzie 1.3 to $G$ zapisujemy $(G,\cdot,^{-1},1)$, a warunki (1) (2) (3) wyglądają następująco:

$$\forall g_1,g_2,g_3\in G \quad (g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3) \tag{4}$$

$$\forall g\in G \quad g1=1g=g \tag{5}$$

$$\forall g\in G \quad \exists g^{-1}\in G \quad gg^{-1}=g^{-1}g=1. \tag{6}$$

Wtedy 1 - "jedynka" jest elementem neutralnym dla mnożenia, a $g^{-1}$ jest nazywany elementem odwrotnym do $g$.
Dalej jeżeli nie bedzie konieczne inaczej to będziemy stosować zapis multiplikatywny.

**Definicja 3** *Niech $G$ jest grupą. Jeżeli $H\subseteq G$ oraz*

$$\forall h_1,h_2\in H \quad h_1h_2\in H \tag{7}$$

$$\forall h\in H \quad h^{-1}\in H \tag{8}$$

*to wtedy $H$ jest podgrupą $H$ co oznaczamy $H<G$.*

**Definicja 4** *Niech $G$ jest grupą, $g \in G$. Rzędem elementu $g$ (oznaczany $rz(g)$ lub $|g|$) nazywamy najmniejszą liczbe naturalną $n$ taką, że $g^n = e$.*

**Przykład 4** *Podgrupą dowolnej grupy $G$ jest zawsze $G$ oraz trywialna $\{e\}$.*

**Przykład 5** *W* $5.1 - 5.6$ *są opisane przykładowe podgrupy grup odpowiednio* $1.1 - 1.6$. *Uwaga:* $r\mathbb{Q} = \{rq : q \in \mathbb{Q}\}$.
5.1 $(\mathbb{R}, +, ^{-}, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, ^{-}, 0)$, $(\mathbb{Z}, +, ^{-}, 0)$, $(\mathbb{Q} + r\mathbb{Q}, +, ^{-}, 0)$, $(r\mathbb{Z}, +, ^{-}, 0)$ (r - dowolna, z góry ustalona liczba rzeczywista),
5.2 $(k\mathbb{Z}_n, +_n, ^{-}_n, 0)$, (k - dowolna, z góry ustalona liczba naturalna),
5.3 $(\mathbb{R}_+, \cdot, ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{Q}_+, \cdot, ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{Q}_+, \cdot, ^{-1}, 1)$,
5.4 Zbiór ciągów o skończonym nośniku tzn. który tylko na skończonej liczbie współrzędnych może mieć niezerowe elementy. Zbiór ciągów które od ustalonego miejsca mają wszystkie wyrazy równe zero.
5.5 Zbiór wielomianów, zbiór wielomianów stopnia nie większego od ustalonej liczby naturalnej
5.6 Dla n-kąta foremnego jeśli $k \setminus n$ to podgrupą może być zbiór obrotów wielokąta o wielokrotność $\frac{k\Pi}{n}$.

**Zadanie 1** *$H < G$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 h_2^{-1} \in H$$

**Zadanie 2** *Ustalmy $k \in \mathbb{Z}$. Wykazać, że $\mathbb{Z}$ jest grupą z działaniem binarnym $a \oplus b = a + b + k$.*

**Zadanie 3** *Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje grupa posiadająca $n$ podgrup.*

**Zadanie 4** *Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Wtedy podgrupą $(\mathbb{R}_+, \cdot, ^{-1}, 1)$ jest $(\mathbb{Q}_+ + \sqrt{n}\mathbb{Q}, \cdot, ^{-1}, 1)$, ale tylko dla $n$ pierwszych*

**Zadanie 5** *Niech $U_n$ oznacza zbiór elementów odwracalnych w pierścieniu $Z_n$.*
*1) Udowodnić że $(U_n, \cdot_n, ^{-1}_n, 1)$ jest grupą abelową,*
*2) Zbuduj tabelkę działania dla $U_{18}$. Od czego zależy ilość elementów w $U_n$?,*
*3) Wyznacz dla jakiego $n$ dwucyfrowego $U_n$ jest najliczniejsza.*

**Zadanie 6** *Wykaż, że $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a^2 + b^2 > 0 \right\}$ jest grupą abelową z działaniem mnożenia macierzy. Udowodnij także, że jej podgrupą jest zbiór macierzy tej postaci gdzie $a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}$ albo zbiór macierzy dla których $a^2 + b^2 = 1$.*

**Zadanie 7** *Niech $G$ jest grupą abelową.*
*a) udowodnij że $G_1 = \{g \in G : rz(g) \leq 2\}$ jest podgrupą $G$,*
*b) udowodnij że $G_2 = \{g^2 : g \in G\}$ jest podgrupą $G$.*

**Zadanie 8** *Wykaż, że $G_n = \left\{\cos(\frac{2\Pi a}{n}) + i\sin(\frac{2\Pi a}{n}) : a \in \{0, 1, ..., n-1\}\right\}$ jest grupą dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wraz z operacją mnożenia liczb zespolonych.*

**Zadanie 9** *Udowodnij że $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ jest grupą z operacją $\oplus$ określoną w następujący sposób: $(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bc + d)$.*

**Zadanie 10** *Niech $G$ będzie grupą, $g \in G$ i niech $f_1 : G \to G$ będzie funkcją postaci $f_1(x) = gx$. Udowodnij że $f_1$ jest bijekcją. Wykaż też że $f_2(x) = x^{-1}$ jest także bijekcją.*

**Zadanie 11** *$rz(g) = rz(x^{-1}gx) = rz(g^{-1})$ dla dowolnych elementów $x, g \in G$.*

**Zadanie 12** *Niech $G_1 < G$, $G_2 < G$. Udowodnij że $G_1 \cup G_2 < G$ wtedy i tylko wtedy gdy $G_1 \subseteq G_2$ lub $G_2 \subseteq G_1$.*

**Zadanie 13** *Ile grupa $S_5$ ma elementów rzędu: 2, 3, 4, 5, 6, 7?*

**Zadanie 14** *Udowodnij, że $U_{18}$ jest cykliczna a $U_{20}$ nie.*