

# PODGRUPY NORMALNE, GRUPY ILORAZOWE

Piotr Słanina

2 stycznia 2002

**Definicja 1** Niech  $(H, +, -, 0)$  będzie podgrupą grupy  $(G, +, -, 0)$  (co zapisujemy  $H < G$ ) i niech  $g \in G$ .

*Uwaga:* definicje w nawiasach dotyczą zapisu multiplikatywnego grup, który będę dalej stosował na zmianę z addytywnym:  $(H, \cdot, ^{-1}, 1)$  oraz  $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ .

Zbiór  $g + H = \{g + h : h \in H\}$  ( $gH = \{g \cdot h : h \in H\}$ ) nazywamy warstwą lewostronną grupy  $H$  względem elementu  $g$ . Zbiór  $H + g = \{h + g : h \in H\}$  ( $Hg = \{h \cdot g : h \in H\}$ ) nazywamy warstwą prawostronną grupy  $H$  względem elementu  $g$ .

**Twierdzenie 1** Jeśli  $G$  jest dowolną abelową grupą to każda jej podgrupa  $H$  jest normalna.

**Dowód** Istotnie,  $g + H = \{g + h : h \in H\} = \{h + g : h \in H\} = H + g$ .

**Twierdzenie 2** .

a) Jednostronne warstwy są rozłączne względem siebie, równoliczne, a ich suma jest równa  $G$ .

b) Liczba warstw prawostronnych jest równa liczbie warstw lewostronnych.

**Definicja 2** Niech  $H < G$ . Jeżeli warstwy prawostronne i lewostronne są sobie równe to  $H$  nazywamy podgrupą normalną grupy  $G$  i oznaczamy  $H \triangleleft G$ . Zbiór wszystkich warstw będziemy oznaczać  $\frac{G}{H}$ .

Niech  $H \triangleleft G$ . Dla uproszczenia zapisu będziemy zapisywać  $0 + H$  jako  $H$ . Wtedy

a)  $(g_1 + H) + (g_2 + H) = g_1 + (H + g_2) + H = (g_1 + g_2) + (H + H) = g_1 + g_2 + H$   
i stąd

b)  $(g + H) + H = g + (H + H) = g + H$ ,

c)  $(g + H) + (-g + H) = (g - g) + H = H$ . Czyli można określić na warstwach działanie dodawania w oparciu o dodawanie określone w grupie  $G$ . Nazywa się to działaniem dodawania indukowanym przez dodawanie w grupie.

To przynosi nam ciekawą własność:

**Własność 1** Niech  $G, H$  to grupy takie, że  $H \triangleleft G$ . Zbiór warstw  $\frac{G}{H}$  razem z indukowanym dodawaniem tworzy grupę, zwaną grupą ilorazową.

**Przykład 1** Niech  $G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z}$ . Ponieważ  $\mathbb{Z}$  jest abelowa to na pewno  $H \triangleleft G$ . Warstwy wyglądają następująco:  $H = \{5k; k \in \mathbb{Z}\}, 1 + H = \{5k + 1; k \in \mathbb{Z}\}, \dots, 4 + H = \{5k + 4; k \in \mathbb{Z}\}$ . Zauważmy, że np.  $H = \{5k + 3; k \in \mathbb{Z}\} = \{5k + 18; k \in \mathbb{Z}\}$ . Tabela działania dla grupy ilorazowej wygląda następująco:

	+	$H$	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$
$H$	$H$	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$	
$1 + H$	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$H$	
$2 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$H$	$1 + H$	
$3 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$H$	$1 + H$	$2 + H$	
$4 + H$	$4 + H$	$H$	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	

Jak widać, grupa ta jest izomorficzna z  $\mathbb{Z}_5$ .

**Zadanie 1** Niech  $H < G$ . Udowodnić, że następujące warunki są równoważne (używam zapisu multiplikatywnego):

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\forall g \in G, gH = Hg$                             | 2) $\forall g \in G, g + H \subseteq Hg$                  |
| 3) $\forall g \in G, gH \supseteq Hg$                     | 4) $\forall g \in G, g^{-1}Hg = H$                        |
| 5) $\forall g \in G, g^{-1}Hg \subseteq H$                | 6) $\forall g \in G, g^{-1}Hg \supseteq H$                |
| 7) $\forall g \in G, h \in H, \exists h' \in H, gh = h'g$ | 8) $\forall g \in G, h \in H, \exists h' \in H, hg = gh'$ |

Pokażę np. 4)  $\Leftrightarrow$  5). Ponieważ w 4) zachodzi równość, zatem w 5) wynika bezpośrednio z 4). Zatem założmy, że zachodzi 5):

$$\forall g \in G, g^{-1}Hg \subseteq H \Rightarrow Hg \subseteq gH \Rightarrow H \subseteq gHg^{-1}.$$

$g$  są dowolnymi elementami z  $G$ . Zatem zbiór elementów  $g^{-1}$  to też jest zbiór dowolnych elementów z  $G$ . Jeżeli oznaczę:  $\hat{g} := g^{-1}$  to uzyskam  $\forall \hat{g} \in G, H \subseteq \hat{g}^{-1}H\hat{g}$ , czyli zapisując "od końca" mamy  $\forall \hat{g} \in G, \hat{g}^{-1}H\hat{g} \supseteq H$ , co kończy dowód, bo uzyskuje  $\hat{g}^{-1}H\hat{g} = H$ .

**Zadanie 2** Wypisać lewo- i prawostronne warstwy podgrupy  $H = \{0, 4, 8\}$  w  $G = \mathbb{Z}_{12}$  oraz zbudować tabelę działania dla  $\frac{G}{H}$ . Wymień jak najwięcej znanych Ci grup izomorficznych z tą grupą ilorazową.

**Zadanie 3** Wykazać, że  $S_3$  ma trzy podgrupy normalne i trzy podgrupy, które nie są normalne.

**Zadanie 4** Niech  $H \triangleleft G$ ,  $\varphi : G \rightarrow G_1$  będzie homomorfizmem grup. Udowodnić, że  $\varphi(H) \triangleleft \varphi(G)$ . Pokazać także, że odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe oraz że nie jest prawdą, że  $\varphi(H) \triangleleft G_1$ .

**Zadanie 5** Jeśli  $H < G$  oraz istnieją tylko dwie warstwy lewo- (lub prawostronne)  $g + H$  to  $H \triangleleft G$ .

**Zadanie 6** Niech  $G$  będzie grupą i niech  $H = \{(g, g, g) : g \in G\}$ . Udowodnij, że  $H < G \times G \times G$  oraz że  $H \triangleleft G \times G \times G$  wtedy i tylko wtedy gdy  $G$  jest abelowa.

**Zadanie 7** Znaleźć wszystkie podgrupy w  $D_4$  (albo w grupie przekształceń izometrycznych kwadratu, ponieważ jest izomorficzna z  $D_4$ ) i stwierdzić, które z nich są normalne, a które nie.

**Zadanie 8** Jeśli  $H_1 \triangleleft G$  i  $H_2 \triangleleft G$  to  $H_1 \cap H_2 \triangleleft G$ .

**Zadanie 9** Jeśli  $K \triangleleft G$  i  $H < G$  to  $K \cap H \triangleleft H$ .

**Zadanie 10** Niech  $f : G \rightarrow H$  będzie homomorfizmem grup i niech  $K = \{a \in G : f(a) = e_H\}$ . Udowodnij że  $K$  jest podgrupą normalną w  $G$ .

**Zadanie 11** Udowodnij że w  $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$  każdy element ma skończony rząd oraz że  $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$  zawiera elementy dowolnego skończonego rzędu.

**Zadanie 12** Niech  $G_1, G_2$  będą grupami i niech  $G_1^* = \{(g_1, e) : g_1 \in G_1\}$ . udowodnić, że:

- a)  $G_1^* \cong G_1$
- b)  $G_1^*$  jest podgrupą normalną  $G_1 \times G_2$
- c)  $\frac{(G_1 \times G_2)}{G_1^*} \cong G_2$ .

**Zadanie 13** Niech  $G$  będzie addytywną grupą  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pokazać że  $H = \{(x, y) : y = -x\}$  jest podgrupą  $G$  i opisać grupę ilorazową  $\frac{G}{H}$ .