BAZA I WYMIAR PRZESTRZENI

Piotr Słanina [0]

22 kwietnia 2003

Definicja 1 *Kombinacją liniową wektorów z* $(V, F, +, \cdot)$ *nazywamy element* x *postaci* $x = k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n$*, gdzie* $x_i \in V$*,* $k_i \in \mathbb{K}$*,* $n < \infty$.

Definicja 2 *Układ wektorów* $x_i, i \in \{1, ..., n\}$ *nazywamy układem wektorów liniowo niezależnych, jeżeli dla dowolnego układu skalarów* $k_i \in F$ *spełniony jest warunek* $\Sigma_{i=1}^n k_ix_i = 0 \Rightarrow k_i = 0$ *dla* $i \in \{1, ..., n\}$.

Definicja 3 *Bazą przestrzeni* $(V, F, +, \cdot)$ *nazywamy taki układ wektorów liniowo niezależnych, że każdy element przestrzeni* V *można przedstawić jako kombinację liniową elementów z tej bazy.*
Liczbę wektorów bazy nazywamy wymiarem przestrzeni V.

Przykład 1 *W przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *wektory* $(1, 0, 0, 0)$*,* $(0, 1, 0, 0)$*,* $(0, 0, 1, 0)$*,* $(0, 0, 0, 1)$ *są liniowo niezależne ponieważ:* $a(1, 0, 0, 0)+b(0, 1, 0, 0)+c(0, 0, 1, 0)+d(0, 0, 0, 1) = (a, b, c, d)$ *jest równy wektorowi zerowemu gdy* $a = b = c = d = 0$*. Ponadto za pomocą tych czterech wektorów można wygenerować dowolny element* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *czyli stanowią one bazę.*
Ogólnie, w $\mathbb{R}^n$ *bazą może być zbiór wektorów* $(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0)$*, ... ,* $(0, 0, 0, ..., 1)$ *(tzw. baza standartowa). Widać stąd, że wymiar przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *wynosi 3.*

Własność 1 *Zbiór wektorów jest liniowo niezależny w* $\mathbb{R}^n$ *wtedy i tylko wtedy gdy macierz zbudowana z tych wektorów ma rząd równy ilości tych wektorów. Ponadto (zakładając ich liniową niezależność) wektory te są bazą wtedy i tylko wtedy gdy liczba tych wektorów wynosi* n.

Przykład 2 *Bazą w* $\mathbb{C}$ *nad* $\mathbb{R}$ *jest zbiór* $\{1, i\}$*, jak również zbiór* $\{2 - i, 5 + 2i\}$*. Bazą* $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ *jest np. zbiór wszystkich macierzy posiadających na jednym miejscu jedynkę, a w pozostałych "kratkach" zera.*

Zadanie 1 *Który z poniższych zbiorów wektorów jest bazą w* $\mathbb{R}^3$*?*
a) $(0, 2, 1), (1, 0, 1)$*, b)* $(2, 1, -2), (-1, 1, 1), (-1, -2, 1)$*, c)* $(2, 0, 3), (1, 1, 5), (0, -2, 1)$ *(odp. tylko c).*

[0] Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990

Zadanie 2 *Niech B jest bazą V, a U podprzestrzenią V. Niech $C = \{b \in B : b \in U\}$. Pokazać, że równość $lin(C) = U$ nie musi zachodzić.*

Zadanie 3 *Niech $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ oznacza zbiór wektorów liniowo zależnych w przestrzeni wektorowej nad ciałem nieskończonym. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele sposobów przedstawienia wektora y jako kombinacji liniowej wektorów $x_1, x_2, ..., x_n$.*

Zadanie 4 *Załóżmy, że wektor y można przedstawić jednoznacznie jako kombinację liniową wektorów $x_1, x_2, ..., x_n$. Wykazać, że $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych.*

Zadanie 5 *Zbiór $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych a $\{x_1, x_2, ..., x_n, y\}$ jest zbiorem wektorów liniowo zależnych. Wykazać, że wektor y można przedstawić jednoznacznie jako kombinację liniową wektorów $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.*

Zadanie 6 *Udowodnić, że $(0, 2, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$ jest bazą w przestrzeniach $\mathbb{Z}_3^3$, $\mathbb{Z}_5^3$, ... , $\mathbb{Z}_p^3$, gdzie p jest dowolną liczbą pierwszą różną od 2. Wektor $(2, 1, 1)$ wyraź za pomocą kombinacji liniowej podanych wyżej wektorów, jeżeli wiadomo, że wektor ten jest z: a) $\mathbb{Z}_3^3$, b) $\mathbb{Z}_5^3$, c) $\mathbb{Z}_{13}^3$.*

Zadanie 7 *Pokaż ,że w $(\mathbb{C}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ bazą jest układ wektorów a) $(1, 0)$, $(i, 0)$, $(0, 1)$, $(0, i)$; b) $(1, i)$, $(2 - i, -2)$, $(2i, i)$, $(0, 3i)$. Wyrazić za pomocą kombinacji liniowej drugiego z podanych układów wektor $(2 + 2i, 2 - 3i)$.*

Zadanie 8 *Udowodnić, że przestrzeń ciągów nieskończonych o wymiernych współczynnikach nie ma przeliczalnej bazy. Spróbować najpierw sprawdzić, dlaczego np. zbiór ciągów $\{\ (1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, ...),\ ...\ \}$ nie może być bazą.*

Zadanie 9 *Znaleźć jakąkolwiek bazę przestrzeni rowiązań układów równań:*

$$a) \begin{cases} x - y + 2v = 0 \\ y + z - 5v = 0 \\ x + z - 3v = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - 4y + 9z = 0 \\ 2x + 2y + 6z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \Sigma_{i=1}^n x_i = 0 \\ \\ \Sigma_{i=1}^n (-1)^i x_i = 0 \end{cases}$$

rozw. a) $\{(-2, 0, 5, 1), (1, 1, -1, 0)\}$; b) brak bazy (przestrzeń zerowymiarowa) c) bazę tworzy suma dwóch "rodzin" wektorów: pierwsza to wektory posiadające na pierwszej współrzędnej -1, na jednej z nieparzystych 1, a pozostałe równe zero; druga to wektory posiadające na drugiej współrzędnej -1, na jednej z parzystych 1, a pozostałe równe zero.