

OPERATORY SPECJALNE

Piotr Słanina⁰

22 kwietnia 2003

Twierdzenie 1 Dla każdego $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ istnieje dokładnie jeden $\varphi^* \in \text{Hom}(V, V)$ taki, że $(\varphi(u), v) = (u, \varphi^*(v))$ dla wszystkich u, v .

Definicja 1 Jeżeli $\varphi = \varphi^*$ to operator φ nazywa się hermitowskim.

Własność 1 Macierz odpowiadająca operatorowi hermitowskiemu jest postaci $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ i nazywa się macierzą hermitowską.

Definicja 2 Jeżeli $\varphi^{-1} = \varphi^*$ to operator φ nazywa się unitarnym.

Definicja 3 Jeżeli $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ to operator φ nazywa się normalnym.

Definicja 4 Jeżeli $\varphi^p = E$ dla pewnego $p \in \mathbb{N}$ to operator φ nazywa się nilpotentnym, a p stopniem nilpotentności (tego operatora).

UWAGA: poniższą definicję operatora "SKR" przyjmijmy tutaj jedynie w celu uniknięcia kolizji oznaczeń - w literaturze dotyczącej Teorii Grup operatory - macierze - o tej własności nazywa się elementami skończonego rzędu, natomiast definicja rzędu przekształcenia już została zdefiniowana wcześniej m. in. jako rząd macierzy przekształcenia;

Definicja 5 Jeżeli $\varphi^p = I$ dla pewnego $p \in \mathbb{N}$ to operator φ jest operatorem "SKR".

Definicja 6 Jeżeli $\varphi(e_i) = \alpha_i e_i$ dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n\}$ to operator φ jest operatorem diagonalnym.

Zadanie 1 Dane są macierze

$$A_1 = I, \quad A_2 = E, \quad A_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz, które z nich są hermitowskie, unitarne, nilpotentne, normalne, "SKR" (odp. A_1 - unit. herm. norm. "SKR", A_2 - herm. norm, A_3 - unit. norm, "SKR", A_4 - nilpotentna).

⁰Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990

Zadanie 2 Wykaż, że poniższe operatory φ_1, φ_2 są nilpotentne:

a) $\varphi_1(e_1) = 0, \quad \varphi_1(e_i) = e_{i-1}, \quad i \in \{2, \dots, n\},$

b) $\varphi_2(e_1) = 0, \quad \varphi_2(e_i) = e_1 + e_2 + \dots + e_{i-1}, \quad i \in \{2, \dots, n\}.$

Zadanie 3 Udowodnić, że dla dowolnych operatorów $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, V)$ zachodzą związki:

$$I^* = I, \quad (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*, \quad (\varphi^*)^* = \varphi, \quad (\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*, \quad (k\varphi)^* = k\varphi^*.$$

Zadanie rozwiązać zarówno za pomocą operatorów, jak i za pomocą macierzy.

Zadanie 4 Wykazać, że różniczkowanie $\frac{d}{dx}$ jest operatorem nilpotentnym w przestrzeni $\{F(x) \in \mathbb{R}_f[x] : \text{st}(F) \leq n\}$ wielomianów stopnia mniejszego lub równego n .

Zadanie 5 Wykazać, że moduł wyznacznika $|\det(A_\varphi)|$ macierzy odpowiadającej operatorowi unitarnemu φ w dowolnej bazie wynosi 1.

Zadanie 6 Udowodnij, że jeśli A jest operatorem nilpotentnym to $\det(A) = 0$, a następnie wykaż (np. przez wskazanie kontrprzykładu), że z $\det(A) = 0$ nie musi wynikać nilpotentność.

Zadanie 7 Udowodnij, że jeżeli macierz A jest "SKR" to $|\det(A)| = 1$, a następnie wykaż, że jeżeli $|\det(A)| = 1$ to macierz A wcale nie musi być "SKR".

Zadanie 8 Wykazać, że wymiar przestrzeni operatorów: diagonalnych jest n , a hermitowskich $\frac{n(n+1)}{2}$ w \mathbb{R}^n .

Zadanie 9 Znajdź warunek, dla którego operator diagonalny jest unitarny ($\sum |\alpha_i|^2 = 1$, gdzie α_i to elementy z przekątnej macierzy przekształcenia).

Zadanie 10 Wykazać, że moduł wyznacznika $|\det(A_\varphi)|$ macierzy odpowiadającej operatorowi unitarnemu φ w dowolnej bazie wynosi 1.

Zadanie 11 Znaleźć macierze $A_i \in M_{5 \times 5}$ takie, że:

a) $\text{rz}(A_1) = 3, \quad \text{rz}(A_1)^2 = 2, \quad \text{rz}(A_1)^3 = 1, \quad \text{rz}(A_1)^4 = 0,$

b) $\text{rz}(A_2) = 3, \quad \text{rz}(A_2)^2 = 1, \quad \text{rz}(A_2)^3 = 0,$

c) $\text{rz}(A_3) = 2, \quad \text{rz}(A_3)^2 = 0,$

d) $\text{rz}(A_3)^n = 3$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 7 Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią niezmienniczą operatora $\varphi, \varphi \in H(V, V)$, jeżeli $\varphi(U) \subseteq U$

Zadanie 12 a) Wykazać, że $0, V, \text{Ker}(V), \text{Im}(V)$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi operatora φ .

b) Jeżeli U_1, U_2 są podprzestrzeniami niezmienniczymi U to $U_1 \cap U_2$ też nią jest, a $U_1 \cup U_2$ nią nie musi być (ostatnią, trudniejszą część zadania najlepiej opisać na jakimś kontrprzykładzie).