

PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

Piotr Słanina⁰

22 kwietnia 2003

Definicja 1 *Przekształceniem (operatorem) liniowym φ nazywamy homomorfizm przestrzeni liniowej $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ na przestrzeń $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$, czyli funkcję spełniającą warunki:*

1) $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2)$,

2) $k\varphi(v) = \varphi(kv_1)$,

gdzie $v_1, v_2, v \in V, k \in \mathbb{K}$.

Przykład 1 *Przykłady przekształceń liniowych (sprawdzić na podst. definicji, że są to operatory liniowe):*

1) $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -3x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2)$

2) $\varphi_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$

3) $\varphi_3 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}, \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = ((2i - 1)x_1 - 3ix_3)$

4) $\varphi_4 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \varphi_4(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^n k_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n k_{2i}x_i, \dots, \sum_{i=1}^n k_{mi}x_i)$,
gdzie $k_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \mathbb{N}$.

Bardziej ogólne przykłady (V, W oznaczają dowolną przestrzeń liniową):

5) $\varphi_5 : V \rightarrow V, \varphi_5(v) = v$ ($\varphi = id$).

6) $\varphi_6 : V \rightarrow W, \varphi_6(v) = 0$

Warto wiedzieć, że każde przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ musi być takiej postaci jak w przykładzie 4).

Przykład 2 *Przykłady funkcji nie będących przekształceniami liniowymi:*

1) $\psi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \psi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3 + x_2, -x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$

2) $\psi_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (|x_2| - x_3, 2^{x_2})$

3) $\psi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \psi_3(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{x_1x_2 - x_3})$

Definicja 2 *Jądrem $Ker\varphi$ operatora liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ jest zbiór wektorów przekształcanych za pomocą φ w zero:*

$$Ker\varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$$

Definicja 3 *Obrazem $Im\varphi$ operatora liniowego φ jest zbiór następujących wektorów:*

$$Im\varphi = \{w \in W : \exists v \in V, \varphi(v) = w\}$$

⁰Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990

Definicja 4 *Rzędem operatora nazywamy wymiar jego obrazu:*

$$rz\varphi = \dim Im\varphi.$$

Twierdzenie 1 *Jądro i obraz przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednio V oraz W .*

Twierdzenie 2 *Jeżeli $\varphi : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym i $\dim V < \infty$ to $\dim Im\varphi + \dim Ker\varphi = \dim V$.*

Przykład 3 *Rozpatrzmy trzy pierwsze przekształcenia z przykładu 1.*

1) $Ker\varphi_1 = \{0\}, Im\varphi_1 = \{(t_1 + t_2, -3t_1 + 2t_2, -t_1 + 4t_2) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.
 $\dim Ker = 0, \dim Im = 2$

2) $Ker\varphi_2 = \{t_1, 0, -2t_1, t_2\}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, Im\varphi_2 = \mathbb{R}^2$. $\dim Ker = \dim Im = 2$

3) $Ker\varphi_3 = \{t_1, t_2, -\frac{2i-1}{3}t_1\}, t_1, t_2 \in \mathbb{C}, Im\varphi_3 = \mathbb{C}$. $\dim Ker = 2, \dim Im = 1$

Zadanie 1 *Znajdź jądro i obraz (oraz ich wymiary) następujących przekształceń liniowych przestrzeni \mathbb{R}^3 na siebie:*

- symetrii przestrzeni względem płaszczyzny $y = 0$,*
- rzutowania przestrzeni na płaszczyznę $y = -z$,*
- symetrii przestrzeni względem prostej $-x = y \wedge z = 0$,*
- rzutowania przestrzeni na prostą $x = y = -z$,*
- obrotu przestrzeni o kąt 90^0 względem osi OX ,*

Definicja 5 *Dwie przestrzenie V, W są izomorficzne jeżeli istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ przestrzeniami takie, że $Im\varphi = W$ oraz φ jest funkcją różnowartościową.*

Zadanie 2 *Operator φ jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy gdy $Ker\varphi = 0$.*

Zadanie 3 *Pokazać, izomorfizm pomiędzy następującymi przestrzeniami (czyli wskazać różnowartościowy homomorfizm "na"):*

- $(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$,
- $(W_5[\mathbb{R}], \mathbb{R}, +, \cdot)$,
- $(M_{3 \times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$,
- $(V_1, \mathbb{R}, +, \cdot)$, V_1 - przestrzeń nieskończonych ciągów o elementach z \mathbb{R} , które od siódmego miejsca posiadają same zera.
- $(V_2, \mathbb{R}, +, \cdot)$, V_2 - dowolna sześciowymiarowa przestrzeń nad ciałem \mathbb{R} .

Pojęcie izomorfizmu jest bardzo przydatne. Przestrzenie izomorficzne mają bowiem takie same własności, np. taki sam wymiar czy ilość wektorów czy skalarów.

Zadanie 4 *Udowodnić, że żadna z poniższych przestrzeni nie jest izomorficzna z $(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}, +, \cdot)$:*

- $(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$.