

PRZESTRZENIE LINIOWE

Piotr Słanina⁰

25 lipca 2001

Definicja 1 *Przestrzenią liniową (wektorową) nad ciałem $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ nazywamy strukturę algebraiczną $(V, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ (lub w skrócie V), złożoną ze zbioru wektorów V , zbioru skalarów \mathbb{K} oraz działań: wewnętrznego $V \oplus V \rightarrow V$ i zewnętrznego $\mathbb{K} \odot V \rightarrow V$ spełniających następujące warunki:*

- 1) (V, \oplus) jest grupą abelową;
- 2) $k \odot (v_1 \oplus v_2) = (k \odot v_1) \oplus (k \odot v_2)$ dla dowolnych $k \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$;
- 3) $(k_1 + k_2) \odot v = (k_1 \odot v) \oplus (k_2 \odot v)$ dla dowolnych $k_1, k_2 \in \mathbb{K}, v \in V$;
- 4) $k_1 \odot (k_2 \odot v) = (k_1 \cdot k_2) \odot v$ dla dowolnych $k_1, k_2 \in \mathbb{K}, v \in V$;
- 5) $1 \odot v = v$ dla dowolnego $v \in V$.

Definicja 2 *$(U, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $(V, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ wtedy i tylko wtedy gdy*

- 1) $U \subset V$
- 2) $\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 \oplus u_2 \in U$;
- 3) $\forall u \in U, k \in \mathbb{K} \quad k \odot u \in U$.

Dalej jeżeli nie będzie to powodować kolizji oznaczeń będziemy używać zamiast \oplus, \odot oznaczeń $+, \cdot$.

Przykład 1 *Niech A jest dowolnym zbiorem. Wtedy A^n jest zbiorem elementów postaci (a_1, \dots, a_n) , gdzie $a_i \in A$, np. \mathbb{Q}^3 oznacza zbiór trójelementowych wektorów z wymiernymi elementami.*

Przykłady przestrzeni liniowych (w poniższych przykładach \mathbb{K} oznacza dowolne ciało, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$):

- 1) $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$, n dowolna liczba naturalna;
- 2) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, n dowolna liczba naturalna;
- 3) $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$, n dowolna liczba naturalna;
- 4) $(W_n[\mathbb{K}], \mathbb{K}, +, \cdot)$; $W_n[\mathbb{K}]$ to wielomiany o współczynnikach z \mathbb{K} ;
- 5) $(M_{n \times m}(\mathbb{K}), \mathbb{K}, +, \cdot)$; $M_{n \times m}(\mathbb{K})$ to macierze $n \times m$ nad ciałem \mathbb{K} ;
- 6) $(\mathbb{K}^{\mathbb{K}}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ funkcji $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.
- 7) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ nieskończonych ciągów o elementach z \mathbb{K} .

⁰Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990 oraz "Algebra i wielowymiarowa geometria...", S. Przybyło, A. Szlachetowski WNT Warszawa, 1993

Zadanie 1 Wykazać, że jeśli $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ jest ciałem to $(\mathbb{K}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową.

Zadanie 2 Pokazać, że $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \cdot, \odot)$ jest przestrzenią wektorową, gdzie \cdot oznacza zwykłe mnożenie, a $k \odot x = x^k$.

Zadanie 3 Czy $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową, jeżeli działanie \oplus jest zdefiniowane w następujący sposób:

- a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
 - b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
 - c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$,
 - d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (\min\{x_1, x_2\}, \min\{y_1, y_2\})$.
- (odp. tylko b).

Zadanie 4 Niech $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową. Określmy działanie na parach elementów z V :

$$(x_1, y_1) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ dla } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V^2,$$
$$(k_1, k_2) \odot (x, y) = (k_1x - k_2y, k_2x + k_1y) \text{ dla } (k_1, k_2) \in \mathbb{C}, (x, y) \in V^2.$$

Wykazać, że $(V^2, \mathbb{C}, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 5 W zbiorze wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych określono dodawanie i mnożenie wektorów przez liczbę. Który z poniższych zbiorów jest przestrzenią wektorową (wraz z wektorem zerowym):

- a) wektory o końcach należących do prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych,
 - b) wektory o końcach w pierwszej ćwiartce ukł. współ.
 - c) wektory o końcach w drugiej lub czwartej ćwiartce ukł. współ.
- odp. tylko a).

Zadanie 6 Udowodnić, że podprzestrzeniami $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ są:

- a) Zbiór funkcji posiadających pochodną n -tego rzędu
- b) Zbiór funkcji ograniczonych

Udowodnić, że podprzestrzeniami $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ są:

- a) Zbiór wszystkich ciągów ograniczonych,
- b) Zbiór wszystkich ciągów zbieżnych,
- c) Zbiór wszystkich ciągów zbieżnych do zera,
- d) Zbiór wszystkich ciągów których elementy od pewnego miejsca są równe zero.

Zadanie 7 W zbiorze \mathbb{C}^n rozpatrujemy podzbiory:

- a) $\{x : x_1 \in \mathbb{R}\}$,
- b) $\{x : \arg(x_1) = \arg(x_n)\}$,
- c) $\{x : \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| = |x_n|\}$,
- d) $\{x : x_i = 2x_{i-1}\}$ dla $i = 2, \dots, n$,

e) $\{x : x_1 = \bar{x}_n\}$.

Które z nich są podprzestrzeniami \mathbb{C}^n nad ciałem \mathbb{C} , które nad \mathbb{R} (odp. d) zawsze, a), e) tylko nad \mathbb{R}).

Zadanie 8 Zbiór funkcji $\{f : f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}\}$ wraz z działaniami $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ oraz $k \odot f(x) = kf(x)$ stanowi przestrzeń liniową. Sprawdzić, który z następujących podzbiorów stanowi podprzestrzeń tej przestrzeni:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}$,

b) $f : f(0) = 3f(\frac{1}{3}) = -4f(1)$,

c) $f : \sum_{i=1}^n f(\frac{1}{i}) = 0$,

d) f jest nieciągła,

e) f jest ciągła,

f) f jest monotoniczna lub stale równa zero.

odp. a), b), c), e).

Zadanie 9 Niech V_1, V_2 są podprzestrzeniami przestrzeni V . Czy są również jej podprzestrzeniami:

a) $V_1 \cup V_2$, b) $V_1 \cap V_2$, c) $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

(odp. a) oraz c) są podprzestrzeniami).