

# TENSORY

Piotr Słanina<sup>0</sup>

29 maja 2001

**Definicja 1** Niech  $V$  oznacza przestrzeń liniową nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Tensorem nazywamy przekształcenie liniowe  $T : V^n \rightarrow \mathbb{K}$  względem każdego z argumentów tzn. dla dowolnego  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$T(v_1, \dots, kv_i + \bar{v}_i, \dots, v_n) = kT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + T(v_1, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_n).$$

Zbiór tensorów oznaczamy przez  $T_n(V)$ .

**Własność 1** Zbiór  $T_n$   $n$ -tensorów tworzy przestrzeń liniową nad  $\mathbb{K}$ .

**Definicja 2** Niech  $T$  jest  $n$ -tensorem. Jeżeli zachodzi jeden z następujących (równoważnych!) warunków

$$T(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0, T(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -T(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots),$$

to  $T$  jest nazywany  $n$ -tensorem skośnie symetrycznym. Zbiór tych tensorów oznaczamy przez  $T_n^{sk}(V)$ .

**Definicja 3** Niech  $T$  jest  $n$ -tensorem. Jeżeli dla dowolnej permutacji  $\sigma \in S_n$  zachodzi

$$T(v_1, v_2, \dots, v_n) = T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}),$$

to  $T$  jest nazywany  $n$ -tensorem symetrycznym. Zbiór tych tensorów oznaczamy przez  $T_n^{sym}(V)$ .

**Zadanie 1** Sprawdzić czy w  $V$  każdy iloczyn skalarny jest 2-tensorem, gdzie  $V$  to przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  (nad  $\mathbb{C}$  nie jest).

**Zadanie 2** Czy każdy 1-tensor jest t. symetrycznym, skośnie symetr. (tak).

**Zadanie 3** Sprawdzić, czy każdy 2-tensor jest op. liniowym  $V^2$  w  $K$  (nie).

**Zadanie 4** Wykazać, że iloczyn mieszany  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ ,  $v_i \in \mathbb{R}^3$ , jest tensorem antysymetrycznym.

---

<sup>0</sup>Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990

Zdefiniujmy następujące funkcje  $f_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, 8\}$ :

$$f_1((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3$$

$$f_2((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_2 + x_2y_3 - 3x_3y_1$$

$$f_3((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_3y_2$$

$$f_4((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1$$

$$f_5((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 0$$

$$f_6((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_1$$

$$f_7((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 + 3x_2y_2$$

$$f_8((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \ln(2^{x_2y_3})$$

$$f_9((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 2x_3y_1 + 2x_1y_3$$

**Zadanie 5** Sprawdzić, które z powyżej zdefiniowanych funkcji są 2-tensorami, które są tensorami symetrycznymi, antysymetrycznymi (odp. tensorem nie jest  $f_7$ , t. symetrycznym są  $f_1$ ,  $f_5$ ,  $f_6$ , natomiast t. antysymetrycznym są  $f_4$ ,  $f_5$  oraz  $f_9$ ).

Niech  $f_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in \{10, 11, 12\}$  będą funkcjami postaci:

$$f_{10}((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = 2x_1y_1z_2$$

$$f_{11}((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = 2x_1y_2z_3 + 2x_2y_3z_1 + 2x_3y_1z_2$$

$$f_{12}((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_3 - x_3y_1$$

**Zadanie 6** Sprawdzić, które z powyżej zdefiniowanych funkcji są 3-tensorami, które są tensorami symetrycznymi, antysymetrycznymi. (odp. tensorem nie jest  $f_{12}$ , t. symetrycznym jest  $f_{11}$ , natomiast nie ma t. antysymetrycznych).

**Zadanie 7** Niech  $T$  będzie 2-tensorem w przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ . Sprawdzić, że  $T((3, 3), (3, 3)) = 27$  oraz  $T((n, n), (-3, -3)) = -9n$  jeżeli wiadomo, że  $T((1, 1), (1, 1)) = 3$ .

**Zadanie 8** Niech  $T$  będzie 2-tensorem w  $\mathbb{R}^2$ . Niech  $T((1, 0), (2, 2)) = 3$  oraz  $T((0, 1), (3, 3)) = -2$ . Sprawdzić, że  $T((1, 2), (6, 6)) = -1$ .

**Zadanie 9** Niech  $T$  będzie  $n$ -tensorem. Wykazać, że  $T_+$  zdefiniowany wzorem

$$T_+(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

jest  $n$ -tensorem symetrycznym (aby zrozumieć to zadanie, spróbować udowodnić najpierw to twierdzenie dla  $n=2$  albo  $n=3$ . Wtedy bowiem  $T_+(v_1, v_2) = T(v_1, v_2) + T(v_2, v_1)$  i  $T_+(v_1, v_2, v_3) = T(v_1, v_2, v_3) + T(v_2, v_1, v_3) + T(v_1, v_3, v_2) + T(v_3, v_1, v_2) + T(v_3, v_2, v_1) + T(v_2, v_3, v_1)$  po podstawieniu odpowiednich wartości  $n$ ).

**Zadanie 10** Wykazać, że jeśli  $\dim V > 0$  to  $\dim T_n(V) > 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$  (rozwiązanie: wystarczy wskazać nietrywialny tensor; niech  $\dim V = d$ . Wtedy  $V = (x_1, \dots, x_d)$ , a nietrywialnym tensorem może być  $np$ .

$$T_n((x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d), \dots, (v_1, \dots, v_d)) = x_1y_1 \dots v_1 + x_2y_2 \dots v_2 + \dots + x_dy_d \dots v_d.$$

Warto zauważyć, że wskazany tensor jest symetryczny).