

WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE POSTAĆ JORDANA

Piotr Słanina ⁰

5 lipca 2001

Definicja 1 Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} , $\varphi : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, $A_\varphi \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ macierzą tego przekształcenia.

Wartościami (skalarami) własnymi $\lambda \in \mathbb{K}$ przekształcenia φ (macierzy A_φ) nazywamy rozwiązania równania $\det(\varphi - \lambda\varphi_{id}) = 0$ ($\det(A_\varphi - \lambda I) = 0$).

Własność 1 Wart. wł. A_φ oraz φ są sobie równe.

Definicja 2 Wektorem własnym X macierzy A_φ nazywamy każdy niezerowy wektor kolumnowy taki, że $(A_\varphi - \lambda I) \cdot X = 0$ dla pewnej wartości własnej λ .

Jeżeli macierz A ma tyle wartości własnych (wielokrotne wartości własne liczone "wiele" razy) ile wynosi wymiar tej macierzy, to macierz $J = X^{-1}AX$ jest macierzą która na głównej przekątnej posiada wartości własne oraz

a) Jeżeli wartości własne są jednokrotne to jest macierzą diagonalną.

b) Jeżeli wartości własne są wielokrotne to bezpośrednio ponad przekątną mogą pojawić się jedyńki w niektórych polach.

Dla jednokrotnych wartości własnych X jest macierzą utworzoną z połączenia dowolnych wektorów własnych ale liniowo niezależnych.

Definicja 3 Macierz J określona powyżej nazywa się postacią Jordana albo postacią normalną macierzy A .

Definicja 4 Dwie macierze A i B są sprzężone jeżeli istnieje macierz X taka, że $A = X^{-1}BX$.

Zadanie 1 Wyznaczyć wartości i wektory własne oraz postać Jordana dla poniższych macierzy nad ciałem \mathbb{R} :

$$a) \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -6 & 5 & 8 \\ 5 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -8 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

⁰Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990

$$d) \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(odp. a): $\lambda \in \{5, 6\}$, $x_1 = (-t, t)$, $x_2 = (3t, -2t)$ odp. b): $\lambda \in \{1, 2, 3\}$, $x_1 = (0, 2t, -t)$, $x_2 = (3t, -2t, 3t)$, $x_3 = (t, -t, t)$ odp. c): $\lambda \in \{1, 0, -1\}$, wektory własne j. w. odp. d): $\lambda \in \{-6, 0, 1, 2, 5\}$, wektory własne $x_1 = (t, -t, 0, 0, 0)$, $x_2 = (t, -t, 0, 0, 0)$, $x_3 = (-48t, -33t, t, t, 0)$, $x_4 = (31t, 25t, 0, 8t, -t)$, $x_5 = (47t, 31t, -t, 55t, 0)$

Zadanie 2 Znajdź wartości własne, wektory własne i ilość tych wektorów

dla macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ gdzie współczynniki są z:

a) ciała \mathbb{Z}_3 (odp. $\lambda = 2$, $x = (0, t, t)$, $t \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$, ilość=3)

b) ciała \mathbb{Z}_5 (odp. $\lambda = 0, 2$, $x_1 = (t, t, 2t)$, $x_2 = (2t, t, 0)$, $t \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$, ilość=8)

c) ciała \mathbb{Z}_7 (odp. $\lambda = 4$, $x = (5t, 0, t)$, $t \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$, ilość=6)

Zadanie 3 Ile jest możliwych postaci Jordana macierzy $A_\varphi \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ jeżeli wiadomo, że:

a) $n = 15$ i dokładnie dwie klatki Jordana są 4×4

a) $n = 16$ i dokładnie trzy klatki Jordana są 3×3

a) $n = 14$ i jest siedem klatek Jordana

a) $n = 9$ nie ma pojedynczych klatek Jordana

a) $n = 9$ i klatki są różnej wielkości

(rozw. a) - 12, b) - 11, c) - 15, d) - 8, e) - 8).

Zadanie 4 Znaleźć postać Jordana macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & -4 & 0 \\ -5 & 6 & 6 & -1 \\ -5 & 8 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

Rozw. a) na przekątnej 3 i dwie klatki wielkości 2×2 ; b) oraz c) na przekątnej -1 i jedna klatka 4×4 .

Które spośród tych macierzy są sprzężone? (odp. b) i c), ponieważ mają taką samą postać Jordana).

Zadanie 5 Obliczyć A^{47} , gdzie A jest dowolną macierzą z zadania 1.

Zadanie 6 Znaleźć postać Jordana macierzy $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ o współczynnikach zespolonych w zależności od parametru $u \in \mathbb{R}$.

Rozw. dla $u < 0$ na przekątnej $(-u)^{\frac{1}{4}}, -(-u)^{\frac{1}{4}}, i(-u)^{\frac{1}{4}}, -i(-u)^{\frac{1}{4}}$.
dla $u > 0$ na przekątnej $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(-u)^{\frac{1}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(-u)^{\frac{1}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(-u)^{\frac{1}{4}},$
 $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)(-u)^{\frac{1}{4}}$.
dla $u = 0$ na przekątnej zera i jedna klatka Jordana 4×4 .

Zadanie 7 Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy przekształcenia $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, będącego:

- symetrią przestrzeni względem płaszczyzny $y = -z$,
- rzutowaniem przestrzeni na płaszczyznę $y = -z$,
- symetrią przestrzeni względem prostej $-x = 2y = z$,
- rzutowaniem przestrzeni na prostą $-x = 2y = z$,
- obrotom przestrzeni o kąt 45° względem osi OY ,
- dowolnym przekształceniem postaci $\varphi(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + c_2z, a_3x)$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8 Udowodnij, że

- Wszystkie skalary własne operatora hermitowskiego są rzeczywiste.
- Wszystkie skalary własne operatora unitarnego spełniają warunek $|\lambda| = 1$.