

WYZNACZNIKI

Piotr Słanina⁰

29 maja 2001

Twierdzenie 1 Niech $T : V^n \rightarrow \mathbb{K}$ będzie funkcją liniową względem i -tej zmiennej i niech $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$. Wtedy funkcja $T^\varphi : U^n \rightarrow \mathbb{K}$ zdefiniowana wzorem

$$T^\varphi(u_1, \dots, u_n) = T(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$$

jest liniowa względem każdej ze zmiennych, czyli jest tensorem.

Definicja 1 Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą w przestrzeni \mathbb{K}^n . Jako \det nazywamy taki n -tensor skośnie symetryczny dla którego $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ (uwaga! trzeba zauważyć, że wymiar $\dim V = n$ musi być równy liczbie " n " przy oznaczeniu tensora).

Własność 1 Dla każdej przestrzeni \mathbb{K}^n jest dokładnie jeden taki tensor \det o podanej powyżej własności.

Definicja 2 Niech $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Wtedy $\det^\varphi = \det(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ nazywamy wyznacznikiem \det operatora φ , gdzie $\{e_1, \dots, e_n\}$ jest bazą w przestrzeni \mathbb{K}^n .

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą w \mathbb{R}^n . Zdefiniujemy następujące przekształcenia $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

1. $\varphi_1(e_1) = e_1 - e_2$, $\varphi_1(e_2) = 2e_1 + e_3$, $\varphi_1(e_3) = -2e_2 - 2e_3$;
2. $\varphi_2(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$, $\varphi_2(e_2) = -e_1 - 2e_2 + e_3$, $\varphi_2(e_3) = 2e_1 + e_2$,

oraz przekształcenia przestrzeni \mathbb{R}^4 w siebie:

3. $\varphi_3(e_1) = e_1 - e_2$, $\varphi_3(e_2) = e_2 + e_3$,
• $\varphi_3(e_3) = -e_3 + e_4$, $\varphi_3(e_4) = -4e_1 - 2e_4$;
4. $\varphi_4(e_1) = e_3$, $\varphi_4(e_2) = -e_2 + e_3$,
• $\varphi_4(e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3$, $\varphi_4(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 - 2e_4$.

⁰Zadania częściowo na podst. skryptu "Algebra i Geometria Analityczna z zadaniami", E. Płonka, Gliwice 1990

Zadanie 1 Obliczyć zarówno z definicji wyznacznika jak i zapisując odpowiednie macierze wyznaczniki powyższych przekształceń. (rozwiązanie: $\det^{\varphi^2} = 0$, a pozostałe wyznaczniki są równe -2).

Zadanie 2 Sprawdzić następujące wzory:

$$\det(\varphi + \psi) = \det(\varphi) + \det(\psi), \quad \det(-\varphi) = -\det(\varphi), \quad \det(k\varphi) = k \cdot \det(\varphi),$$

gdzie φ, ψ to przekształcenia liniowe \mathbb{K}^n na \mathbb{K}^n . (rozwiązanie: dla dowolnego n żaden ze wzorów nie jest prawdziwy; pierwszy jest prawdziwy tylko dla $n = 1$, drugi dla n nieparzystego, a trzeci albo dla $k = 0$ albo gdy $n = 1$).

Zadanie 3 Wykazać, że $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg v_1, v_2, \dots, v_n jest liniowo zależny.

Zadanie 4 Wykazać, że $\det(\varphi^2) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy φ^{-1} istnieje.

Zadanie 5 Wyznaczyć \det^{φ} , gdzie

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(e_{i+1}) = e_{i+1} + 2\varphi(e_i),$$

$i \in \{1, \dots, n-1\}$ (rozwiązanie: $\det^{\varphi} = 1$).

Zadanie 6 Mamy dane przekształcenia liniowe $\varphi, \psi : V^n \rightarrow V^n$ takie, że $\det\varphi = 5$. Wykazać, że zachodzą równości: $\det\varphi^4 = 625$, $\det 3\varphi = 3^n 5$ oraz że nie można jednoznacznie obliczyć $\det^{\varphi+\psi}$ gdy dane są $\det\varphi, \det\psi$.

Zadanie 7 Niech $\varphi_{\sigma}, \sigma \in S_n$ będzie operatorem z $\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ zdefiniowanym warunkiem $\varphi_{\sigma}(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Obliczyć $\det(\varphi_{\sigma})$.

Zadanie 8 Podać przykład takich przekształceń $\varphi_i, \psi_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, żeby $\det\varphi_i = \det\psi_i = 2$ oraz

1. $\det(\varphi_1 + \psi_1) = 0$,
2. $\det(\varphi_2 + \psi_2) = 4$,
3. $\det(\varphi_3 + \psi_3) = 5$,
4. $\det(\varphi_4 + \psi_4) = 6$,
5. $\det(\varphi_4 + \psi_4) > t$,
6. $\det(\varphi_4 + \psi_4) < t$, gdzie t to z góry ustalona liczba.